Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 1

Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon   buchert@obs.univ–lyon1.fr   Tél. : 06 84 68 03 88

1.1. Intégrale générale de l'équation de continuité

Prouvez que pour le champ de densité le long de la trajectoire de l'élément de fluide, $\varrho(\mathbf{X},t)$, l'intégrale générale suivante est solution de l'équation de continuité pour la densité $\varrho(\mathbf{x},t)$:

$$\varrho(\mathbf{X},t) = \frac{\varrho_o(\mathbf{X})}{J(\mathbf{X},t)} \; . \tag{1.1}$$

Ici, J représente le déterminant de la matrice de Jacobi, $J_{ik}(\mathbf{X},t) \equiv \partial f_i / \partial X_k$, matrice de passage des coordonnées euleriennes aux coordonnées lagrangiennes. Les conditions initiales sont données sous la forme $J(\mathbf{X},t_0) = \det(\delta_{ik}) = 1$ et $\varrho(\mathbf{X},t_0) \equiv \varrho_0(\mathbf{X})$.
Montrez que, *localement*, l'intégrale (1.1) satisfait l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\varrho \mathbf{v}) = \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = 0 \; . \tag{1.2}$$

On a noté $\mathbf{v}$ le champ de vitesse des éléments de fluide, et d/dt l'opérateur de dérivée totale (ou lagrangienne) par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \equiv \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{X}} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla} \; . \tag{1.3}$$

Conseil : Écrivez le jacobien J en tant que déterminant fonctionnel,

$$J = \frac{\partial\,(f_1, f_2, f_3)}{\partial\,(X_1, X_2, X_3)} \; := \begin{vmatrix} f_{1|1} & f_{1|2} & f_{1|3} \\ f_{2|1} & f_{2|2} & f_{2|3} \\ f_{3|1} & f_{3|2} & f_{3|3} \end{vmatrix} \; , \tag{1.4}$$

où $f_{i|j} := \partial f_i / \partial X_j$, $i = 1 \ldots 3, j = 1 \ldots 3$, et montrez que

$$\frac{d}{dt} J = J \; \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \; . \tag{1.5}$$

1.2. Analyse vectorielle et opérateur ∇

Deux champs de vecteur differentiables sont donnés, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{V}$, ainsi qu'une fonction scalaire differentiable ϕ. Donnez les définitions et expressions en coordonnées cartesiennes des grandeurs fondamentales de l'analyse vectorielle : le *gradient* $\boldsymbol{\nabla}\phi$, la *divergence* $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}$, le *rotationnel* $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$, la *dérivée directionnelle* du champ $\mathbf{A}$ en direction du champ $\mathbf{V}$, $(\mathbf{V}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}$, ainsi que la définition de l'operateur de Laplace $\Delta := \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}$. Justifiez ensuite l'identité suivante :

$$\Delta\mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}) - \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) \ . \tag{1.6}$$

1.3. Analogie avec les équations de Maxwell

Allons voir plus profondément la structure des équations de la gravitation newtonienne en employant l'analogie avec les équations de Maxwell. Les équations de Maxwell pour des champs $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ (le champ électrique), et $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ (le champ magnétique) obéissent à [1] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \quad ; & \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= 4\pi\varrho_e \quad ; \\ \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} &= \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e + \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \quad ; & \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} &= 0 \quad , \end{aligned} \tag{1.7}$$

où ϱ_e est le champ de la densité de charge, et $\mathbf{j} := \varrho_e\mathbf{v}$ le champ de la densité de courant, avec sa vitesse d'écoulement associée $\mathbf{v}$. Les équations pour $\mathbf{E}$ sont appelées *loi de Faraday* et *loi du Coulomb*, les équations pour $\mathbf{B}$ sont *loi d'Ampère* et *loi de Gauss* (l'absence des monopoles magnétiques).

1.3.1. La propagation des ondes électromagnetiques

Rappelez, comment, en calculant $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})$, et $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})$, nous obtenons les équations de propagation d'onde suivantes :

$$\Box\mathbf{E} \ = \ 4\pi\boldsymbol{\nabla}\varrho_e + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}_e \quad ; \quad \Box\mathbf{B} \ = \ -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{j}_e \ , \tag{1.8}$$

avec *l'opérateur d'Alembert* $\Box := \partial^2/\partial x_0^2 + \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, écrit dans *l'espace–temps de Minkowski* (muni de ses coordonnées standard $x_0 = ict, x_1, x_2, x_3$).

Dans le cas où les sources disparaissent, $\varrho_e = 0$ et donc $\mathbf{j}_e = \mathbf{0}$, ces équations décrivent la propagation des ondes électromagnetiques dans le vide avec la vitesse c.

1.3.2. Analogie avec la théorie electrostatique

Vérifiez que, dans le cas de distributions statiques de charges et de masses, l'analogie triviale entre les équations de la gravitation et les équations de Maxwell doit évidemment associer les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{g}$ suivant $\mathbf{E}\sim-\mathbf{g}$ (en remplaçant ϱ_e par ϱ, et en posant $G = 1$ et $\Lambda = 0$), de sorte que la théorie électrostatique corresponde formellement à la théorie de la gravitation.

1. Nous employons les unités gaussiennes ; pour une présentation claire de l'électrodynamique classique, voir le livre de Jackson [Jackson, J.D. (1975) : *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York].

1.3.3. Analogie avec la théorie electrodynamique

Nous pouvons également trouver un lien analogique pour le champ magnétique, comme nous le montrons maintenant.

Considérons les équations de champ pour $\mathbf{B}$. Puisque nous avons également une densité de courant $\mathbf{j} := \varrho\mathbf{v}$ pour l'écoulement des éléments de fluide dans la théorie de la gravitation, nous pouvons nous demander, s'il y a une relation avec la dérivée du champ gravitationnel par rapport au temps.
En utilisant l'équation de continuité et la relation entre la densité et la divergence du champ $\mathbf{g}$, montrez que nous trouvons :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g} - 4\pi G\mathbf{j} \right] \;=\; \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{g} - 4\pi G\mathbf{j} \;=:\; \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\tau} \quad , \tag{1.9}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est un potentiel vectoriel de la densité de courant, et Φ un potentiel scalaire :

$$4\pi G\mathbf{j} \;=\; -\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Phi - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\tau} \quad . \tag{1.10}$$

1.3.4. Donc, est-ce qu'il y a des ondes gravitationnelles ?

En l'absence d'une équation pour la divergence de $\boldsymbol{\tau}$, nous pouvons imposer une condition de jauge (jauge transversale), $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$, pour fournir l'analogue de la partie magnétique des équations de Maxwell : $\mathbf{B} \sim -\boldsymbol{\tau}/c$ (en remplaçant $\mathbf{j_e}$ par $\mathbf{j}$, $G = 1$).
Montrez que les champs vectoriels $\mathbf{g}$ et $\boldsymbol{\tau}$ obéissent à des équations de Poisson :

$$\Delta\mathbf{g} \;=\; -4\pi G\boldsymbol{\nabla}\varrho \quad ; \quad \Delta\boldsymbol{\tau} \;=\; 4\pi G\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{j} \quad . \tag{1.11}$$

Ces équations ne décrivent pas la propagation d'ondes. Pourquoi ?

1.3.5. Analyse d'un écoulement restreint

Afin d'obtenir une intuition sur les propriétés cinématiques du champ $\boldsymbol{\tau}$, remarquons que, par définition, $\boldsymbol{\tau}$ est un *champ harmonique*, si et seulement si $\Delta\boldsymbol{\tau} = 0$. Cherchons alors une classe de solutions pour laquelle la source dans l'équation de Poisson ci–dessus est identiquement nulle.
Discutez le type de cette classe de mouvement en utilisant $\mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}$ dans la condition $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

Littérature recommandée (TD 1.3) : Le livre de Abraham Pais
[Pais, A. (1982) : *Subtle is the Lord ... The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford Univ. Press].