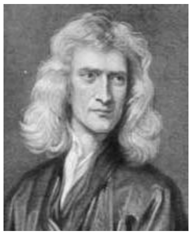
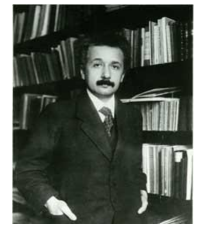


# Formation Sciences de la Matière
# Cours : Physique Master 1 (ENS)

*Introduction aux Théories de la Gravitation*

## TD 10



Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon    buchert@obs.univ–lyon1.fr    Tél. : 06 84 68 03 88

### 10.1. Une manipulation avec les équations d'Einstein

Considerez les équations spatiales d'Einstein suivantes,

$$\dot{g}_{ij} = -2\,K_{ij} \;\; ; \tag{10.1}$$

$$-\dot{K}_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik}K^k_{\;j} \;=\; -c^2\,\mathcal{R}_{ij} + (\,4\pi G\varrho + \Lambda)g_{ij} \;\; , \tag{10.2}$$

pour la métrique spatiale $g_{ij}$ et la courbure extrinsèque $K_{ij}$, et confirmez la dérivation des équations équivalentes ci–dessous pour $\Theta^i_{\;j}$ :

$$\dot{g}_{ij} = 2\,g_{ik}\Theta^k_{\;j} \;\; ; \tag{10.3}$$

$$\dot{\Theta}^i_{\;j} = -c^2\,\mathcal{R}^i_{\;j} - \theta\Theta^i_{\;j} + (\,4\pi G\varrho + \Lambda\,)\,\delta^i_{\;j} \;\; . \tag{10.4}$$

Rappelez que le tenseur d'expansion est définit par $\Theta_{ij} := -K_{ij}$.

*Conseil :* Faites attention que l'opération de dérivée partielle par rapport au temps ne commute pas avec l'opération de baisser ou d'élever un indexe.

### 10.2. L'équation de Friedmann dans le cadre de la relativité générale

#### 10.2.1. La contrainte de Hamilton

Montrez que ≪ la contrainte de Hamilton ≫,

$$c^2\,\mathcal{R} + K^2 - K^i_{\;j}\,K^j_{\;i} \;=\; 16\pi G\varrho + 2\Lambda \;\; , \tag{10.5}$$

nous donne l'équation differentielle de Friedmann (la loi d'expansion) dans le cadre de la relativité générale, en utilisant que la distribution des variables soit homogène et isotrope.

*Conseil :* Employez la décomposition cinématique de la courbure extrinsèque,

$$K^i_{\;j} = -\frac{1}{3}\theta\delta^i_{\;j} - \sigma^i_{\;j} \;\; , \tag{10.6}$$

et introduisez la définition pour le taux d'expansion en termes de la fonction de Hubble et du facteur scalaire, $\theta_H = 3H(t) = 3\dot{a}(t)/a(t)$. Remplacez aussi la courbure intrinsèque scalaire homogène avec une courbure constante comme suit : $c^2\mathcal{R}_H = 6k/a(t)^2$.

### 10.2.2. L'équation de Raychaudhuri

Montrez que ≪ l'équation de Raychaudhuri ≫,

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 + \Lambda - 4\pi G\varrho \ , \tag{10.7}$$

nous donne l'autre équation de Friedmann (la loi d'accéleration), en utilisant encore une fois que la distribution des variables soit homogène et isotrope.

Confirmez ensuite que la dérivée par rapport au temps de la loi d'expansion de 10.2.1. mène à cette loi d'accéleration en utilisant la conservation de la masse.

La conservation de la masse peut être considerée comme ≪ condition d'intégrabilité ≫ de la loi d'accéleration.

## 10.3. Moyenner les parties scalaires des équations d'Einstein

Dans le TD 5 nous avons consideré les moyennes spatiales des équations de Newton. Maintenant, lorsque les équations d'Einstein sont très similaires, nous pouvons facilement trouver les équations correspondantes. Mais, nous trouverons aussi des différences intéressantes.

### 10.3.1. La règle de non–commutativité

Montrez qu'avec une intégration spatiale du taux d'expansion $\theta$, on obtiendra ≪ la règle de non–commutativité ≫ pour $\theta$ :

$$\dot{\langle\theta\rangle}_{\mathcal{D}} - \langle\dot{\theta}\rangle_{\mathcal{D}} = \langle\theta^2\rangle_{\mathcal{D}} - \langle\theta\rangle_{\mathcal{D}}^2 = \left\langle(\theta - \langle\theta\rangle_{\mathcal{D}})^2\right\rangle_{\mathcal{D}} \ . \tag{10.8}$$

### 10.3.2. Les équations de Friedmann effectives : moyenner l'équation de Raychaudhuri

Introduisez maintenant ≪ l'équation de Raychaudhuri ≫ à la place d'évolution locale de $\theta$. Montrez ensuite qu'avec la définition d'un facteur scalaire effectif, $a_{\mathcal{D}} := (V_{\mathcal{D}}/V_{\mathcal{D}_i})^{1/3}$, et la définition d'une fonction de Hubble effective, $H_{\mathcal{D}} := \dot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}}$, on va obtenir les équations suivantes :

$$\langle\theta\rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\dot{V}_{\mathcal{D}}}{V_{\mathcal{D}}} = 3H_{\mathcal{D}} \quad , \quad 3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} + 4\pi G\left\langle\varrho\right\rangle_{\mathcal{D}} - \Lambda = \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \ ; \tag{10.9}$$

ici, le terme de ≪ rétroaction ≫ est définit par :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} := 2\left\langle II\right\rangle_{\mathcal{D}} - \frac{2}{3}\left\langle I\right\rangle_{\mathcal{D}}^2 = \frac{2}{3}\left\langle(\theta - \langle\theta\rangle_{\mathcal{D}})^2\right\rangle_{\mathcal{D}} - 2\left\langle\sigma^2\right\rangle_{\mathcal{D}} \ , \tag{10.10}$$

avec les invariants scalaires de la matrice d'expansion $I = \Theta^i{}_i$ et $II = \frac{1}{2}[\,(\Theta^i{}_i)^2 - \Theta^i{}_j\Theta^j{}_i\,]$, ainsi que la décomposition cinématique $\Theta_{ij} = \frac{1}{3}g_{ij}\theta + \sigma_{ij}$.

### 10.3.3. Les équations de Friedmann effectives : moyenner la contrainte de Hamilton

Moyennez maintenant aussi l'équation suivante,

$$c^2\,\mathcal{R} + \theta^2 - \Theta^i{}_j\,\Theta^j{}_i \;=\; 16\pi G\varrho + 2\Lambda \quad , \tag{10.11}$$

et montrez que le résultat se présente en terme d'une équation d'évolution du facteur scalaire :

$$3\left(\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}}\right)^2 - 8\pi G\,\langle\varrho\rangle_{\mathcal{D}} + \frac{\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}}{2} - \Lambda = -\frac{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}{2} \quad . \tag{10.12}$$

### 10.3.4. Les équations de Friedmann effectives : la condition d'intégrabilité

L'équation de Raychaudhuri moyennée est une équation pour l'accéleration du volume, et la contrainte de Hamilton moyennée est une équation pour la vitesse d'expansion du volume.

Lorsque la loi d'expansion doit être la première intégrale de la loi d'accéleration, on attend que la ≪ condition d'intégrabilité ≫ dans ce cas est encore une fois la conservation de la masse.

En utilisant la conservation de la masse totale dans un domaine $\mathcal{D}$, montrez que la dérivée par rapport au temps de notre loi d'expansion effective nous donne la loi d'accéleration effective, mais *seulement* en respectant une autre relation entre la courbure scalaire de Ricci moyennée et le terme de rétroaction des fluctuations cinématiques :

$$\frac{1}{a_{\mathcal{D}}^6}\partial_t\left(\,\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}a_{\mathcal{D}}^6\,\right) \;+\; \frac{1}{a_{\mathcal{D}}^2}\,\partial_t\left(\,\langle\mathcal{R}\rangle_{\mathcal{D}}\,a_{\mathcal{D}}^2\,\right) \;= 0\;. \tag{10.13}$$

Quelles sont vos conclusions, si vous comparez ces résultats avec le cadre newtonien ?