Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 2

Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon buchert@obs.univ–lyon1.fr Tél. : 06 84 68 03 88

2.1. La vorticité d'un écoulement et l'intégrale générale de Cauchy

Nous regardons par la suite l'évolution de la vorticité du champs de vitesse dans un champs gravitationnel de Newton. Confirmez d'abord qu'avec l'équation d'Euler, $d/dt\,\mathbf{v} = \mathbf{g}$, nous trouvons :

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{g} = \boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} \right] = \mathbf{0} \; . \tag{2.1}$$

2.1.1. L'équation du transport de la vorticité de Kelvin–Helmholtz

Employez les identités vectorielles,

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} &= \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \mathbf{a}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{b}) - \mathbf{b} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{a}) \; , \\ \boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{b} + \mathbf{a}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{a} \; , \end{aligned} \tag{2.2}$$

et transformez (2.1) à une équation de transport pour la vorticité $\boldsymbol{\omega} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \; . \tag{2.3}$$

Continuez avec l'aide de la dérivée lagrangienne pour obtenir :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} \; . \tag{2.4}$$

Cette équation est connue comme *l'équation du transport de Kelvin–Helmholtz*.

2.1.2. L'équation du transport de la vorticité de Beltrami

Eliminez ensuite la divergence du champ de vitesse, et dérivez à partir de l'équation (2.4) *l'équation du transport de Beltrami* :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\varrho}\right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\varrho} \cdot \boldsymbol{\nabla}\mathbf{v} \; . \tag{2.5}$$

2.1.3. L'intégrale générale de Cauchy

Montrez que l'íntégrale suivante résout l'équation du transport de Beltrami (2.5) en général :

$$\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\varrho}\right)(\mathbf{X},t) \;=\; \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\varrho}\right)(\mathbf{X},t_0)\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{0}\mathbf{f}(\mathbf{X},t)\;; \tag{2.6}$$

cette intégrale de Cauchy est définie le long les trajectoires $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ du champ de vitesse, et $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{0}$ représente l'opérateur ≪ nabla ≫ par rapport aux coordonnées lagrangiennes $\mathbf{X}$.

Conseil : Cauchy a démontré une identité vectorielle non–triviale : $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{0}\mathbf{v} = [\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{0}\mathbf{f}]\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}$.

2.2. Les invariants d'une matrice et les valeurs propres

Regardez la matrice quadratique de Jacobi :

$$\left(\delta_{ik} + (t-t_0)\frac{\partial V_i}{\partial X_k}\right)\;. \tag{2.7}$$

Montrez d'abord que le déterminant correspondant peut être écrit sous la forme :

$$J(\mathbf{X},t) = 1 + (t-t_0)\;\mathrm{I} + (t-t_0)^2\;\mathrm{II} + (t-t_0)^3\;\mathrm{III}\;. \tag{2.8}$$

Ici, les trois invariants scalaires de la matrice $(\partial V_i/\partial X_k)$ apparaissent : *la trace* I, *la dispersion des éléments diagonaux* II, et *le déterminant* III ;

$$\mathrm{I} \;\equiv\; \mathrm{tr}\left(\frac{\partial V_i}{\partial X_k}\right) \;=\; \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\;, \tag{2.9}$$

$$\mathrm{II} \;\equiv\; \frac{1}{2}\left(\mathrm{I}^2 - \frac{\partial V_i}{\partial X_k}\frac{\partial V_k}{\partial X_i}\right) \;=\; \lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1\;, \tag{2.10}$$

$$\mathrm{III} \;\equiv\; \frac{1}{3}\frac{\partial V_i}{\partial X_k}\frac{\partial V_k}{\partial X_\ell}\frac{\partial V_\ell}{\partial X_i} + \mathrm{I}\cdot\mathrm{II} - \frac{1}{3}\,\mathrm{I}^3 \;=\; \lambda_1\lambda_2\lambda_3\;. \tag{2.11}$$

2.2.1. L'équation de Hamilton–Cayley

Comme vous voyez au–dessus, ces invariants peuvent être écrits aussi avec l'aide des *valeurs propres* λ_i de la matrice : $(\partial V_i/\partial X_k) \equiv \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Notez que la matrice peut être écrite sous forme diagonale seulement à un point donné, $\mathbf{X}^*$; les valeurs propres elles–mêmes sont *réelles* seulement dans le cas où la matrice est symétrique, $(\partial V_i/\partial X_k) \equiv (\partial^2 S_0/\partial X_i X_k)$, donc $\boldsymbol{\nabla}_\mathbf{0}\times\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Les relations entre les invariants et les valeurs propres sont obtenues comme solution du *problème des valeurs propres* $\det(\mathcal{V} - \lambda E) = 0$ (avec $\mathcal{V} := (\partial\, V_i/\partial X_k)$ et $E := (\delta_{ik})$) :

$$\det\left(\mathrm{diag}\left(\lambda_1-\lambda,\lambda_2-\lambda,\lambda_3-\lambda\right)\right) \;=\; \lambda^3 - \lambda^2\;\mathrm{I} + \lambda\;\mathrm{II} - \mathrm{III} \;=\; 0\;; \tag{2.12}$$

cette équation est connue comme *l'équation de Hamilton–Cayley*.

Calculez les valeurs propres λ_i en fonction des invariants en résolvant l'équation cubique (2.12).

2.2.2. Dégénérescence des valeurs propres

Rendez–vous compte que le jacobien, en utilisant les valeurs propres, peut être aussi écrit sous la forme :

$$J(\mathbf{X},t) = ([1+(t-t_0)\;\lambda_1(\mathbf{X})][1+(t-t_0)\;\lambda_2(\mathbf{X})][1+(t-t_0)\;\lambda_3(\mathbf{X})])\;\;. \tag{2.13}$$

Pour un élément materiel donné, $\mathbf{X}^*$, discutez les possibilités d'une dégénérescence en fonction du temps.