Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 3

Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon buchert@obs.univ–lyon1.fr Tél. : 06 84 68 03 88

3.1. Solution exacte générale pour un système auto–gravitant uni–dimensionnel

Nous pouvons étudier le problème mécanique exact du mouvement d'un système auto–gravitant dans une dimension spatiale. A cette fin, nous écrivons le système d'Euler–Newton dans ce cas.

3.1.1. Les équations dans une dimension spatiale

Montrez que nous étudierons le système suivant (en prenant pour simplicité $\Lambda = 0$) :

$$\frac{d}{dt}v_1 = g_1 \ \ ; \ \ \frac{d}{dt}\varrho = -\varrho\frac{\partial v_1}{\partial x_1} \ \ ; \ \ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = -4\pi G\varrho \ \ . \tag{3.1}$$

Nous dérivons ensuite la solution générale de ces équations en utilisant la méthode de Lagrange.

3.1.2. La solution générale pour le champ g_1

Montrez maintenant que, sans perte de généralité, on obtient :

$$\frac{d}{dt}g_1(x_1,t) \ = \ \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{X_1} g_1(X_1,t) \ = \ 0 \ \ , \tag{3.2}$$

i.e., le long des trajectoires les éléments du fluide éprouvent une force gravitationnelle constante.

Notez que, en raison de *la covariance par rapport aux translations* du système d'Euler–Newton, les propriétés physiques du système ne sont pas affectées par l'ajout d'un vecteur constant dans l'espace. Cela implique juste un décalage global sans changer la distribution spatiale.

3.1.3. La solution générale pour la famille des trajectoires f_1

Montrez maintenant que, avec encore deux intégrations par rapport au temps, la solution générale pour la trajectoire suivante est obtenue :

$$f_1(X_1,t) = X_1 + V_1(X_1)(t-t_0) + G_1(X_1)\frac{1}{2}(t-t_0)^2 \ \ , \tag{3.3}$$

avec les conditions initiales $f_1(X_1,t_0) =: X_1$, $V_1(X_1,t_0) =: V_1(X_1)$ et $g_1(X_1,t_0) =: G_1(X_1)$.

Cette solution est *générale*, puisque nous pouvons donner le champ initial de vitesse et le champ initial de densité (par la solution des équations de champ pour la force initiale de champ) *indépendamment*.

3.2. Le comportement non–linéaire du champ gravitationnel

Puisque nous avons pu résoudre le problème uni–dimensionnel, nous sommes encouragés à essayer la même stratégie dans trois dimensions spatiales. Nous combinerons l'expérience que nous avons gagnée dans le TD 1 (sur l'analogie avec les équations de Maxwell), et dans le TD 2 (sur les équations de transport pour la vorticité).

3.2.1. Equation de transport pour le champ gravitationnel

Nous avons déjà trouvé une équation d'évolution pour $\mathbf{g}$ dans le TD 1. En utilisant l'opérateur de la dérivée lagrangienne, montrez d'abord que nous pouvons réécrire cette équation comme suit (mettons $\Lambda = 0$) :

$$\frac{d}{dt}\mathbf{g} \; = \; (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{g} - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{g}) + \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\tau} \;\; , \tag{3.4}$$

et rappelez le rôle du potentiel vectoriel $\boldsymbol{\tau}$.

Nous apprécions que cette équation ressemble fortement l'équation de transport de Kelvin–Helmholtz pour la vorticité. Afin d'exploiter cette analogie complètement, vous devez réécrire notre équation en utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{g}\times\mathbf{v}) \; = \; (\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{g} - \mathbf{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{g}) - \left[\,(\mathbf{g}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{v} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v})\,\right] \;. \tag{3.5}$$

3.2.2. Equation de transport pour le champ gravitationnel spécifique

Montrez ensuite que nous pouvons aussi écrire une équation semblable à l'équation du transport de Beltrami pour la vorticité : calculez $\varrho d/dt\,(\mathbf{g}/\varrho)$, utilisez (3.4), et insérez l'équation de continuité. Montrez que nous obtenons finalement :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{g}}{\varrho}\right) = \left(\frac{\mathbf{g}}{\varrho}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\mathbf{v} + \frac{1}{\varrho}\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} := \boldsymbol{\tau} + \mathbf{g}\times\mathbf{v} \;. \tag{3.6}$$

Nous appelons Eq. (3.6) *l'équation de transport du champ gravitationnel*.

3.2.3. Une intégrale lagrangienne pour le champ gravitationnel

Imposez maintenant la condition

$$\boldsymbol{\nabla}\times\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0} \;\; . \tag{3.7}$$

Après avoir revisité l'intégrale de Cauchy pour la vorticité, discutez que, le long les trajectoires, $\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X},t)$, on obtient l' intégrale suivante :

$$\left(\frac{\mathbf{g}^{\mathrm{I}}}{\varrho}\right)(\mathbf{X},t) \; = \; \left(\frac{\mathbf{G}}{\varrho(t_0)}\right)(\mathbf{X})\cdot\boldsymbol{\nabla}_0\mathbf{f}(\mathbf{X},t) \;\; ; \;\; \mathbf{G} := \mathbf{g}(\mathbf{X},t_0) \;\; . \tag{3.8}$$

Combinez par la suite cette intégrale avec l'intégrale générale pour le champ de densité, et discutez le résultat.

3.2.4. Encore une fois : le cas uni–dimensionnel

Montrez finalement qu'on peut réduire l'intégrale lagrangienne $\mathbf{g}^{\mathrm{I}}$ au résultat uni–dimensionnel pour la composante du champ $g_1 = G_1$.