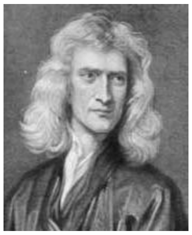
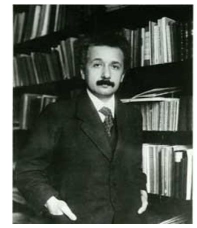


Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 4



Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon buchert@obs.univ–lyon1.fr Tél. : 06 84 68 03 88

4.1. L'évolution lagrangienne des variables cinématiques

Nous pouvons construire un système d'équations de type ordinaire par rapport au temps, pour un ensemble de variables cinématiques. Un tel système va apparaître aussi dans le cadre de la relativité génénerale. A cette fin, nous considérons d'abord l'équation d'Euler.

4.1.1. L'évolution lagrangienne du gradient de la vitesse

Dérivez, à partir de l'équation d'Euler, écrite sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} v_i + v_k v_{i,k} = g_i \ , \tag{4.1}$$

l'équation suivante pour le *gradient spatial de la vitesse* $(v_{i,j})$:

$$\frac{d}{dt} v_{i,j} = -v_{i,k} v_{k,j} + g_{i,j} \ . \tag{4.2}$$

Cette équation peut être vue comme une équation d'évolution du gradient spatial de la vitesse $(v_{i,j})$ le long des trajectoires $\mathbf{f}$.

4.1.2. Décomposition cinématique du gradient de la vitesse

Utilisez maintenant la décomposition cinématique suivante, qui représente le gradient de la vitesse en terme de ses parties i) symétrique $\theta_{ij} \equiv v_{(i,j)} \equiv 1/2\,(v_{i,j} + v_{j,i})$ (*le tenseur d'expansion*), et ii) anti–symétrique $\omega_{ij} \equiv v_{[i,j]} \equiv 1/2\,(v_{i,j} - v_{j,i})$ (*le tenseur de la vorticité*). En outre, la partie symétrique peut être écrite comme la somme d'une partie sans trace (*le tenseur de cisaillement* σ_{ij}), et de la trace $\theta \equiv v_{i,i}$ (*le taux d'expansion*) :

$$v_{i,j} = v_{(i,j)} + v_{[i,j]} \equiv \theta_{ij} + \omega_{ij} \equiv \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij} \ . \tag{4.3}$$

Dérivez maintenant les équations d'évolution pour le taux d'expansion, le cisaillement, et la vorticité.

Conseil : Insérez la décomposition cinématique (4.3) dans (4.2), et écrivez les équations qu'on cherche sous la forme $\dot{\theta} = \cdots$, $\dot{\omega}_{ij} = \cdots$ et $\dot{\sigma}_{ij} = \cdots$ (où le point dénote la dérivée lagrangienne), et utilisez ensuite les définitions suivantes : $\sigma^2 \equiv 1/2\, \sigma_{ij}\, \sigma_{ij}$ (*le taux de cisaillement*) et $\omega^2 \equiv 1/2\, \omega_{ij}\, \omega_{ij}$ (*le taux de rotation*).

4.1.3. Le tenseur des forces de marée de Newton

Les équations que vous viendrez d'obtenir au–dessus, vous pouvez les interpreter comme une *reconstruction* du gradient d'accélération ($g_{i,j}$) en termes des variables cinématiques. Dans ce contexte on définit *le tenseur des forces de marée de Newton* :

$$E_{ij} \equiv g_{(i,j)} - \frac{1}{3}\, g_{k,k} \delta_{ij} \ . \tag{4.4}$$

Réécrivez maintenant le système obtenu au–dessus, en utilisant les équations du système d'Euler–Newton et (4.4), afin d'obtenir un système d'équations d'évolution pour les variables $\rho, \theta, \omega_{ij}$ et σ_{ij}. Le système que vous obtenez fournit un système couplé d'équations du type ordinaire le long des trajectoires. Discutez ensuite la possibilité d'éventuellement résoudre ce systéme avec la méthode de Lagrange.

4.2. Le système de Lagrange–Newton

Dans le cours nous avons étudié *le système de Lagrange–Newton*, qui fournit le système d'Euler–Newton complètement transformé dans l'espace lagrangien. Ce système est un système fermé, qui couple des équations non–linéaires partielles pour le champ de trajectoire.

À partir d'une transformation du gradient d'accélération,

$$g_{i,j} = \frac{1}{2J}\, \epsilon_{jpq}\, \mathcal{J}(g_i, f_p, f_q) \ , \tag{4.5}$$

on a appliqué les équations du champ de Newton, et on a utilisé la définition $\mathbf{g} = \ddot{\mathbf{f}}$. On a obtenu :

$$\frac{1}{2}\epsilon_{abc}\, \frac{\partial(g_a, f_b, f_c)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} - \Lambda\, J \quad = \quad -4\pi G\, \varrho_i(\mathbf{X}) \ , \tag{4.6}$$

$$\epsilon_{pq[j}\, \frac{\partial(g_{i]}, f_p, f_q)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} \quad = \quad 0 \quad , \ i \neq j \ ; \tag{4.7}$$

où ϵ_{jpq} dénote *le symbole Levi–Civita*, $J \equiv \det(\partial f_i / \partial X_k)$ le déterminant de Jacobi, et $\mathcal{J}(v_i, f_p, f_q)$ le déterminent fonctionel des expressions entre parenthèses : $\mathcal{J} \equiv \det(\partial(v_i, f_p, f_q)/\partial(X_1, X_2, X_3))$.

4.2.1. Les tenseurs de cisaillement et des forces de marée sous leurs formes lagrangiennes

Employer maintenant la transformation du gradient de la vitesse, qui donne sa représentation en terme des trajectoires :

$$v_{i,j} = \frac{1}{2J}\,\epsilon_{jpq}\,\mathcal{J}(v_i, f_p, f_q)\ . \tag{4.8}$$

Construisez avec cette transformation des expressions pour le tenseur de cisaillement et le tenseur des forces de marée de Newton en terme du champ de trajectoire :

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2J}\,\epsilon_{(jpq}\mathcal{J}(\dot{f}_{i)}, f_p, f_q) - \frac{1}{6J}\,\epsilon_{mpq}\,\mathcal{J}(\dot{f}_m, f_p, f_q)\,\delta_{ij}\ , \tag{4.9}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2J}\,\epsilon_{(jpq}\mathcal{J}(\ddot{f}_{i)}, f_p, f_q) - \frac{1}{6J}\,\epsilon_{mpq}\,\mathcal{J}(\ddot{f}_m, f_p, f_q)\,\delta_{ij}\ . \tag{4.10}$$

Après avoir trouvé une solution du système de Lagrange–Newton, on pourrait calculer avec ces formules, ou d'autres, les variables qu'on cherchent.

4.2.2. Le système de Langrange–Newton représenté en termes des forces de marée de Newton

Utilisez ensuite, dans l'expression pour le tenseur des forces de marée de Newton, les équations du champ de Newton, et rendez–vous compte qu'on va obtenir l'expression suivante :

$$E_{ij} = \frac{1}{2J}\,\epsilon_{jpq}\,\mathcal{J}(\ddot{f}_i, f_p, f_q) - \frac{1}{3}\left(\Lambda - \frac{4\pi G}{J}\varrho_0\right)\delta_{ij}\ . \tag{4.11}$$

Vérifiez que cette expression n'a pas de trace et qu'elle est symétrique, donc :

$$E_{ii} = 0 \qquad , \qquad E_{[i,j]} = 0\ . \tag{4.12}$$

Ecrivez maintenant les conditions (4.12) avec l'aide de l'équation (4.11) encore une fois, et montrez que le système résultant est equivalent au système de Lagrange–Newton. Comment interpretez–vous ce résultat ?