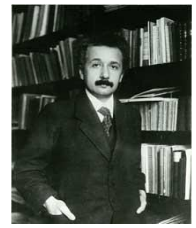
Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 5



Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon buchert@obs.univ–lyon1.fr Tél. : 06 84 68 03 88

5.1. Les propriétés intégrales d'un modèle Newtonien

Pour un modèle inhomogène général, il est difficile de trouver des solutions générique. Par contre, il est possible de regarder les propriétés intégrales d'un modèle général avec l'aide d'une intégration spatiale. A cette fin, nous aborderons les équations que nous avons obtenus dans le TD4. Ici, nous regardons d'abord des méthodes pour faire la moyenne spatiale.

5.1.1. Méthodes auxiliaires pour faire la moyenne spatiale : a) conservation de la masse

Montrez d'abord que la conservation de la masse dans un domaine $\mathcal{D}$, (pour des champs tensoriels $\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)$) mènera à la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} \varrho(\mathbf{x},t)\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)\; d^3x \;=\; \int_{\mathcal{D}} \varrho(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}\mathbf{Q}(\mathbf{x},t)\; d^3x\;. \tag{5.1}$$

Conseil : Passez en coordonnées lagrangiennes et utilisez l'équation de continuité.

5.1.2. Méthodes auxiliaires pour faire la moyenne spatiale : b) la règle de non–commutativité

Montrez que, pour un champ tensoriel $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ (et avec θ le taux d'expansion), on obtient la règle suivante :

$$\frac{d}{dt}\langle\mathbf{F}\rangle_{\mathcal{D}} - \langle\frac{d}{dt}\mathbf{F}\rangle_{\mathcal{D}} = \langle\mathbf{F}\theta\rangle_{\mathcal{D}} - \langle\mathbf{F}\rangle_{\mathcal{D}}\langle\theta\rangle_{\mathcal{D}}\;\;, \tag{5.2}$$

avec la définition de la moyenne spatiale, $\langle\mathbf{F}\rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{V_{\mathcal{D}}}\int_{\mathcal{D}}\mathbf{F}\, d^3x$.

Conseil : Écrivez l'intégrand en coordonnées lagrangiennes et utilisez l'équation d'évolution pour le jacobien.

5.2. Les ≪ Sphères en Fer ≫ de Newton

Le cas de symétrie sphérique est un cas important dans le dévelopment de la théorie de Newton. Avec l'aide des méthodes au–desssus nous pouvons facilement démontrer ≪ le théorème des Sphères en Fer ≫ de Newton.

5.2.1. Les invariants en termes des divergences complètes

Confirmez les propriétés suivantes des invariants scalaires du gradient de la vitesse :

$$I = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} \quad ; \quad II = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_{II} \quad ; \quad III = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\Upsilon}_{III} \ , \ \text{avec}$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}_{II} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}\right) \quad \text{et}$$
$$\boldsymbol{\Upsilon}_{III} \equiv \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v})\cdot\boldsymbol{\nabla}\mathbf{v}\right) \ . \tag{5.3}$$

Comparez avec les définitions de notre TD 2.
Montrez maintenant que les relations de ces invariants aux variables cinématiques sont les suivantes :

$$I = \theta \ ; \ II = \omega^2 - \sigma^2 + \frac{1}{3}\theta^2 \ ; \ III = \frac{1}{27}\theta^3 - \frac{1}{3}\theta(\sigma^2 - \frac{11}{3}\omega^2) + \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} - \frac{1}{3}\sigma_{ij}\omega_i\omega_j \ . \tag{5.4}$$

Conseil : On a introduit le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ avec ses composantes $(\boldsymbol{\omega})_i = \omega_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{jk}$.

5.2.2. Calcul du terme de ≪ rétroaction ≫ $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ dans le cas sphérique

Dans le cours nous avons rencontré le terme de ≪ rétroaction ≫ $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} := 2\langle II\rangle_{\mathcal{D}} - 2/3\langle I\rangle_{\mathcal{D}}^2$, qui décrit, en général, les déviations par rapport à un système homogène et isotrope. Montrez maintenant que, pour un champ de vitesse à symétrie sphérique, $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ sera nul sur un domaine du symétrie sphérique $\mathcal{B}$ avec son rayon $r = r(\mathcal{R}, t)$ (ici, $\mathcal{R} \equiv r(t_0)$).
Conseils : Le champ de vitesse *à l'intérieur* du domaine $\mathcal{B}$ ne dépend que du rayon r, et il est toujours parallel au vecteur d'unité radial $\mathbf{e}_r$: $\mathbf{v} = \mathcal{S}(r)\mathbf{e}_r$ (le champ de vitesse est irrotationnel !).

En employant le théorème de Gauss, vous obtenez pour le premier invariant :

$$\langle I\rangle_{\mathcal{B}} = \frac{3}{4\pi r^3}\int_{\partial\mathcal{B}} \mathcal{S}(r)\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{dA} = 3\frac{\mathcal{S}(r(\mathcal{R},t))}{r(\mathcal{R},t)} \ . \tag{5.5}$$

Utilisez les mêmes arguments pour le deuxième invariant moyenné afin d'obtenir :

$$\langle II\rangle_{\mathcal{B}} = 3\frac{\mathcal{S}^2(r(\mathcal{R},t))}{r^2(\mathcal{R},t)} = \frac{1}{3}\langle I\rangle_{\mathcal{B}}^2 \ . \tag{5.6}$$

Donc, le terme $\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}$ est nul, et $a_{\mathrm{R}}(t)$ est une solution de l'équation de Friedmann pour les paramètres de la distribution sphérique.

Pour compléter cette considération, nous pouvons aussi calculer le troisième invariant. On obtiendra :

$$\langle III\rangle_{\mathcal{B}} = \frac{1}{27}\langle I\rangle_{\mathcal{B}}^3 \ . \tag{5.7}$$

Notez : $(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{v}) = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 S(r)\right)$, et $(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}) = S(r)\frac{d}{dr}$.