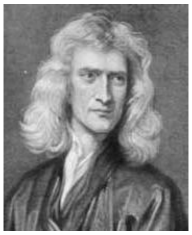
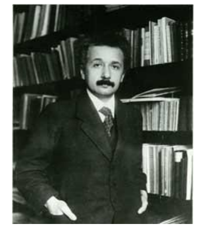


Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 6



Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon buchert@obs.univ–lyon1.fr Tél. : 06 84 68 03 88

6.1. Le transport parallèle et la conservation de la masse

Dans le cours nous avons introduit les formes différentielles de Cartan $\boldsymbol{\eta}^a$ (les ≪ co–frames ≫), qui décrivent une déformation locale non–intégrable d'un élément de fluide.
Nous voyons cette déformation comme une déformation de l'espace avec une géométrie riemannienne.

6.1.1. Le transport parallèle

Montrez d'abord les identités suivantes :

$$\dot{\eta}^a_{\ i} = \eta^a_{\ k}\,\Theta^k_{\ i} \quad ; \quad \dot{e}_b^{\ i} = -e_b^{\ k}\,\Theta^i_{\ k} \ . \tag{6.1}$$

On appelle aussi ces équations d'évolution ≪ les conditions du transport parallèle ≫ pour les formes de Cartan (les ≪ co–frames ≫) et leurs inverses (les ≪ frames ≫).

Ici, la matrice d'expansion $\Theta^i_{\ j}$ est donnée en termes des formes de Cartan par :

$$\Theta^i_{\ j} = e_a^{\ i}\dot{\eta}^a_{\ j} = \frac{1}{2J}\,\epsilon_{abc}\epsilon^{ik\ell}\,\dot{\eta}^a_{\ j}\eta^b_{\ k}\eta^c_{\ \ell} \ . \tag{6.2}$$

6.1.2. La conservation de la masse

Montrez maintenant, avec l'aide d'une intégration spatiale de la densité ϱ en fonction des coordonnées locales, $\varrho(X^i, t)$, qu'on retrouve l'équation de continuité.

Conseil : Commencez avec la masse totale dans un domaine, et demandez que cette masse soit conservée pour un domaine simple connexe.

6.2. Le tenseur inverse de la métrique

Dans le cours nous avons introduit le tenseur de la métrique spatiale. Comme dans la théorie newtonienne nous avons besoin de travailler avec l'inverse d'un tenseur. En particulier, on utilise le tenseur inverse de la métrique pour élever les indexes d'un autre tenseur, et donc, on utilise cette transformation souvent dans les manipulations des équations.

6.2.1. Un exemple

Montrez qu'on a la relation suivante (l'opération d'élever un index) :

$$\Theta^i{}_j = g^{ik}\Theta_{kj} \; ; \tag{6.3}$$

ici g^{ik} dénote *le tenseur inverse métrique*, définit par $g^{ik}\,g_{kj} = \delta^i{}_j$.

Conseil : Employez $\Theta_{kj} = \delta_{ab}\,\eta^a_{\ k}\,\dot{\eta}^b_{\ j}$, multipliez par $g^{ik} = \delta^{cd}\,e_c^{\ i} e_d^{\ k}$, et utilisez $\eta^a_{\ k} e_d^{\ k} = \delta^a{}_d$.

6.2.2. Représenter le tenseur inverse de la métrique en termes de la métrique

Exprimez le tenseur inverse de la métrique, $g^{ij} = \delta^{ab} e_a^{\ i} e_b^{\ j}$, en termes du tenseur de la métrique $g_{ij} = \delta_{ab}\eta^a_{\ i}\eta^b_{\ j}$. Rappelez la transformation qu'on a utilisée dans la théorie newtonienne.

Conseil : Utilisez le passage entre les ≪ frames ≫ et les ≪ co–frames ≫ présenté dans le cours :

$$e_a^{\ i} = \frac{1}{2J}\,\epsilon_{abc}\epsilon^{ik\ell}\,\eta^b_{\ k}\,\eta^c_{\ \ell} \; , \tag{6.4}$$

et utilisez ensuite l'identité suivante :

$$\delta^{ab}\,\epsilon_{acd}\epsilon_{bef} = \delta_{ce}\delta_{df} - \delta_{cf}\delta_{de} \quad . \tag{6.5}$$