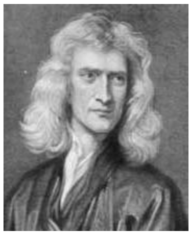
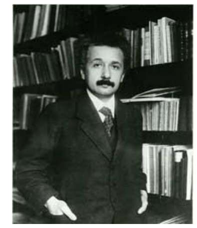


Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 7



Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon   buchert@obs.univ–lyon1.fr   Tél. : 06 84 68 03 88

7.1. Les équations de transport relativistes

La définition de la décomposition cinématique du tenseur d'expansion Θ_{ij}, qui est la plus proche de la définition dans un espace euclidien, est de prendre un index inverse :

$$\Theta^i_{\;j} = \frac{1}{3}\theta\delta^i_{\;j} + \sigma^i_{\;j} + \omega^i_{\;j} \quad , \tag{7.1}$$

avec la trace θ, la partie symétrique sans trace $\sigma^i_{\;j}$, et la partie anti–symétrique $\omega^i_{\;j}$.

L'interprétation de ces parties comme mesures cinématiques dans l'espace (dans la base des coordonnées locales) est obtenue avec l'aide d'une multiplication avec le tenseur métrique :

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{3}\theta g_{ij} + \sigma_{ij} + \omega_{ij} \quad . \tag{7.2}$$

Maintenant, θ peut être interprété comme le taux d'expansion de l'espace, σ_{ij} comme le cisaillement, et ω_{ij} comme la vorticité.

Donc, la décomposition cinématique sur une hypersurface avec une métrique g_{ij} donnée doit respecter les propriétés métriques de l'espace. Dans le cadre newtonien il n'y a pas de différence entre ces deux décompositions. La première version a des avantages formels : on peut directement comparer les matrices à celles du cadre newtonien, et on peut plus facilement prendre la trace sans manipuler avec le tenseur métrique.

7.1.1. Une restriction pour la vorticité du fluide

Rappelez notre dérivation du tenseur d'expansion, présentée dans le cours. Expliquez pourquoi – en utilisant (7.2) – il faut admettre que nous avons une restriction de la généralité : la vorticité du fluide doit être nulle.

Ensuite, confirmez qu'avec cette restriction, nous obtenons les équations suivantes pour les coefficients des formes différentielles de Cartan :

$$0 = \omega_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \;=\; \Theta_{[ij]} = \delta_{ab}\,\dot{\eta}^a_{\;[j}\eta^b_{\;i]} \ . \tag{7.3}$$

7.1.2. Les équations de transport

Regardons les équations newtoniennes pour le gradient de la vitesse,

$$\dot{v}_{i,j} + v_{i,k} v_{k,j} = g_{i,j} \quad . \tag{7.4}$$

Par analogie, le long des arguments présentés dans le cours, nous conclurons que la généralisation non–euclidienne nous donne l'équation suivante :

$$\dot{\Theta}^i{}_j + \Theta^i{}_k \Theta^k_j = \mathcal{F}^i{}_j \ , \tag{7.5}$$

avec un champ $\mathcal{F}^i{}_j$ inconnu et non–intégrable, qui doit se réduire au gradient de l'accéleration dans la limite newtonienne.

Employez la décomposition (7.1), notre généralisation (7.5) et aussi (7.3), et montrez que nous obtenons les équations du transports suivantes :

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 + \mathcal{F}^k_k \ ; \tag{7.6a}$$

$$\dot{\sigma}^i{}_j = -\frac{2}{3}\theta\sigma^i{}_j - \sigma^i{}_k\sigma^k_j + \frac{2}{3}\sigma^2\delta^i{}_j + \mathcal{F}^i{}_j - \frac{1}{3}\mathcal{F}^k{}_k\delta^i{}_j \ , \tag{7.6b}$$

$$\omega^i{}_j = 0 \quad , \tag{7.6c}$$

avec la définition $\sigma^2 := \frac{1}{2}\sigma^i{}_j\sigma^j{}_i = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma^{ij}$, le taux de cisaillement.

7.2. L'analogie relativiste avec les équations de Lagrange–Newton

Par analogie avec les équations du champ newtoniennes, les équations du champ généralisées dans le cadre non–euclidien, qui fournissent des analogies avec les équation de Newton pour le rotationnel et la divergence du champ gravitationnel, doivent être écrites comme suit :

$$\mathcal{F}_{[ij]} = 0 \quad ; \quad \mathcal{F}^k_k = \Lambda - 4\pi G\varrho \ . \tag{7.7}$$

Nous postulons maintenant que ces équations sont correctes.

7.2.1. Les équations de Lagrange–Newton généralisées

Au–dessus nous avons trouvé une expression pour la condition où le fluide est irrotationnel, l'Équation (7.3), et aussi, avec (7.6a) et (7.7), nous avons maintenant l'équation de Raychaudhuri :

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{3}\theta^2 - 2\sigma^2 + \Lambda - 4\pi G\varrho = -\Theta^i{}_j\Theta^j{}_i + \Lambda - 4\pi G\varrho \ . \tag{7.8}$$

Montrez qu'avec ces équations, les formes de Cartan (les ≪ co–frames ≫) obéissent aux équations suivantes, si nous postulons les équations du champ généralisées (7.7) :

$$\delta_{ab}\, \ddot{\eta}^a_{\ [j}\, \eta^b_{\ i]} \ = \ 0 \ ; \tag{7.9a}$$

$$\frac{1}{2}\,\epsilon_{abc}\,\epsilon^{ijk}\ \ddot{\eta}^a_{\ i}\,\eta^b_{\ j}\,\eta^c_{\ k} \ = \Lambda J - 4\pi G\varrho_0 J_0 \quad . \tag{7.9b}$$

Comparez ces équations avec les équations de Lagrange–Newton, et discutez si on pourrait trouver des solutions de ces équations relativistes.

7.2.2. La partie ≪ électrique ≫ des équations d'Einstein

Montrez ensuite que la généralisation du tenseur des forces de marée de Newton peut être définit et utilisé pour une représentation des équations au–dessus comme dans le cadre newtonien :

$$\mathcal{E}^i_{\ j} := \mathcal{F}^i_{\ j} - \frac{1}{3}\mathcal{F}^k_{\ k}\delta^i_{\ j} \ = \ \dot{\Theta}^i_{\ j} + \Theta^i_{\ k}\Theta^k_{\ j} + (\,4\pi G\varrho - \Lambda\,)\,\frac{1}{3}\delta^i_{\ j} \ \ ; \tag{7.10a}$$

$$\mathcal{E}_{[ij]} \ = \ 0 \ \ ; \ \ \mathcal{E}^k_{\ k} \ = \ 0 \ \ . \tag{7.10b}$$

Le tenseur $-\mathcal{E}_{ij}$ est connu dans la relativité générale comme ≪ la projection spatiale de la partie électrique du tenseur de Weyl ≫. Il existe une autre partie ≪ magnétique ≫, qui n'a pas de correspondance dans la théorie newtonienne.

7.2.3. Les équations $\mathcal{F}_{[ij]} = 0$

Notez que nous n'avons pas encore montré que les Équations (7.7) postulées sont des équations correctes dans le cadre de la relativité générale, mais nous montreront plus tard dans le cours qu'elles le sont.

Néanmoins, vous pouvez déjà démontrer que les conditions $\mathcal{F}_{[ij]} = 0$ sont respectées.

Conseil : Montrez d'abord qu'on a $\mathcal{F}^i_{\ j} = e_a^{\ i}\,\ddot{\eta}^a_{\ j}$, et multipliez cette expression avec le tenseur métrique, en représentant celui–ci en termes des coefficients des formes différentielles de Cartan.