Formation Sciences de la Matière
Cours : Physique Master 1 (ENS)

Introduction aux Théories de la Gravitation

TD 8

Thomas Buchert, CRAL, Observatoire de Lyon   buchert@obs.univ–lyon1.fr   Tél. : 06 84 68 03 88

8.1. La connexion spatiale : les symboles de Christoffel

La relativité générale est construite avec une connexion symétrique de l'espace–temps. Aussi, spatialement, touts les tenseurs de la géometrie riemannienne sont définits avec une connexion symétrique. Nous allons voir plus tard dans le cours que ce choix correspond à un espace–temps, ou un espace, sans *torsion*. Jusqu'ici notre déscription est plus générale et permet de décrire une torsion. On appelle cette géometrie plus générale *la géometrie de Riemann–Cartan*.

8.1.1. Construire une connexion symétrique

Montrez que la combinaison de nos coefficients généraux suivante,

$$\Gamma_{jki} := g_{j\ell}\Gamma^{\ell}_{\ ki} = \gamma_{j(ki)} + \gamma_{i[kj]} + \gamma_{k[ij]} \quad , \tag{8.1}$$

nous donne une connexion symétrique dans les indexes k et i. On appelle $\Gamma^{\ell}_{\ ki}$ $\ll$ les symboles de Christoffel $\gg$.

Conseil : Ce résultat peut être trouvé en écrivant l'équation donnée dans le cours,

$$g_{ij|k} - \gamma^{\ell}_{\ ki}\, g_{\ell j} - \gamma^{\ell}_{\ kj}\, g_{\ell i} \;=\; 0 \quad , \tag{8.2}$$

trois fois pour une permutation cyclique des indexes :

$$\begin{aligned} g_{ij|k} - \gamma^{\ell}_{\ ki}\, g_{\ell j} - \gamma^{\ell}_{\ kj}\, g_{i\ell} \;&=\; 0 \;\; ; \\ g_{jk|i} - \gamma^{\ell}_{\ ij}\, g_{\ell k} - \gamma^{\ell}_{\ ik}\, g_{j\ell} \;&=\; 0 \;\; ; \\ g_{ki|j} - \gamma^{\ell}_{\ jk}\, g_{\ell i} - \gamma^{\ell}_{\ ji}\, g_{k\ell} \;&=\; 0 \;\; . \end{aligned} \tag{8.3}$$

Ensuite, on essaye de faire des additions et soustractions jusqu'à ce que l'on trouve la combinaison $g_{ij|k} + g_{jk|i} - g_{ki|j}$, qui nous donne une combinaison symétrique en termes de k et i :

$$g_{ij|k} + g_{jk|i} - g_{ki|j} \;=\; 2\left(\gamma_{j(ki)} + \gamma_{i[kj]} + \gamma_{k[ij]}\right) \quad , \tag{8.4}$$

en manifestant les symboles de Christoffel sur la droite.

8.1.2. Travailler avec une connexion symétrique

Ensuite, écrivez ces symboles avec le premier index en haut, comme avant, et montrez qu'on va obtenir l'expression qui est normalement citée dans la littérature :

$$\Gamma^{\ell}{}_{ki} = \frac{1}{2} g^{\ell j} \left(g_{jk|i} + g_{ji|k} - g_{ik|j} \right) \quad . \tag{8.5}$$

Montrez pour une des équations (8.3) que, par construction, ces coefficients obéissent aussi aux équations (8.3) ; ça nous permets de remplacer nos $\gamma^{\ell}{}_{ki}$ avec $\Gamma^{\ell}{}_{ki}$, et pareil pour les permutations, si nous voulons travailler avec une connexion symétrique.

8.2. La connexion spatiale : les coefficients de rotation de Ricci

Dans la géométrie de Cartan on définit une nouvelle expression pour décrire la connexion, $\bar{\gamma}_{jik}$. On appelle ces coefficients ≪ les coefficients de rotation de Ricci ≫, exprimés dans une base locale comme suit :

$$\bar{\gamma}_{jki} := \delta_{ab} \eta^{a}_{j} \eta^{b}{}_{i||k} \quad , \tag{8.6}$$

où

$$\eta^{a}{}_{i||k} := \eta^{a}{}_{i|k} - \Gamma^{\ell}{}_{ki} \eta^{a}_{\ell} \quad . \tag{8.7}$$

La différence entre nos coefficients de connexion et ces nouveaux coefficients est que la dérivée ordinaire est remplacée par une dérivée covariante.

8.2.1. La dérivée covariante des ≪ co–frames ≫

Confirmez d'abord que la dernière définition de la dérivee covariante des coefficients des ≪ co–frames ≫ est cohérente avec la définition donnée dans le cours pour un tenseur.

Conseil : En posant $T_{ij} = g_{ij} = \delta_{ab} \eta^{a}_{i} \eta^{b}_{j}$ et en utilisant (8.7) nous pouvons confirmer $g_{ij||k} = 0$.

8.2.2. La relation entre ces plusieurs coefficients

Montrez que toutes les définitions données au–dessus impliquent la relation suivante :

$$\gamma_{jki} \;=\; \bar{\gamma}_{jki} + \Gamma_{jki} \quad . \tag{8.8}$$

En particulier, montrez que nous avons aussi :

$$\gamma_{j[ki]} \;=\; \bar{\gamma}_{j[ki]} \quad , \quad \text{et donc} \quad \eta^{a}{}_{[i|k]} \;=\; \eta^{a}{}_{[i||k]} \; . \tag{8.9}$$

Ce résultat implique que la partie anti–symétrique (par rapport à k et i) de $\eta^{a}{}_{i||k}$ peut être remplacée par la partie anti–symétrique avec ses dérivées ordinaires.

8.2.3. La combinaison des parties symétrique et anti–symétrique

Dans la géométrie de Cartan les coefficients de rotation de Ricci $\bar{\gamma}_{mki}$ sont employés à la place des symboles de Christoffel. La logique derrière cette alternative est que, au lieu de construire une connexion symétrique comme nous avons fait au–dessus, nous pouvons aussi imposer une restriction de symétrie sur les coefficients d'une connexion générale.

Discutez maintenant que, en employant la décomposition $\gamma_{jki} = \gamma_{j(ki)} + \gamma_{j[ki]}$ de nos coefficients généraux, et la définition de notre coefficients symétriques (8.1), $\Gamma_{jki} = \gamma_{j(ki)} + \gamma_{i[kj]} + \gamma_{k[ij]}$, nous allons obtenir (notez que le signe des parties anti–symétriques changera en échangant les indexes) :

$$\gamma_{jki} \;=\; \Gamma_{jki} + \gamma_{j[ki]} + \gamma_{i[jk]} + \gamma_{k[ji]} \quad . \tag{8.10}$$

En regardant Eq. (8.8), la partie anti–symétrique (qui ≪ manque ≫ dans les symboles de Christoffel) est donnée par les coefficients de rotation de Ricci :

$$\bar{\gamma}_{jki} \;=\; \gamma_{j[ki]} + \gamma_{i[jk]} + \gamma_{k[ji]} \quad . \tag{8.11}$$

Montrez que $\bar{\gamma}_{jki} + \bar{\gamma}_{ikj} = 0$.

8.2.4. Les propriétés de symétrie des coefficients de la connexion

La relation (8.8) peut être exploitée afin de déterminer des propriétés de symétrie de nos coefficients de la connexion.

Confirmez d'abord que, directement impliqué par Eq. (8.2), nous avons :

$$g_{ij|k} \;=\; \gamma_{ikj} + \gamma_{jki} \quad . \tag{8.12}$$

Montrez ensuite, en utilisant l'expression pour les symboles de Christoffel en termes des coefficients généraux, que nous avons aussi la conclusion suivante :

$$\bar{\gamma}_{j(ki)} + \bar{\gamma}_{i[kj]} + \bar{\gamma}_{k[ij]} \;=\; 0 \quad . \tag{8.13}$$

Cette identité nous montre que l'expression $\gamma^{\ell}_{\ ki}$ ≪ symétrisée ≫, menant aux symboles de Christoffel, est nulle pour les nouveaux coefficients $\bar{\gamma}^{\ell}_{\ ki}$.

Remarque : Pour des manipulations des tenseurs avec trois indices, il faut faire attention à la manière de symétrisation ou d'anti–symétrisation. Par exemple, $\gamma_{ikj} + \gamma_{jki} \neq 2\gamma_{(ikj)}$. Si on prend trois indices entre les parenthèses, ces opérations sont définies, pour un tenseur a_{ijk}, par :

$$\begin{aligned} a_{(ijk)} &= \frac{1}{6}\left[\, a_{ijk} + a_{ikj} + a_{jki} + a_{jik} + a_{kij} + a_{kji} \,\right] \;\; ; \\ a_{[ijk]} &= \frac{1}{6}\left[\, a_{ijk} - a_{ikj} + a_{jki} - a_{jik} + a_{kij} - a_{kji} \,\right] \;\; . \end{aligned} \tag{8.14}$$

8.3. Les équations géodesiques dans un espace riemannien

En utilisant *le principe de variation* on peut extremaliser, entre deux points P et Q, le ségment riemannien ds d'une courbe spatiale $x^i = x^i(\tau)$. On écrit l'action suivante :

$$\mathcal{S} = \int_P^Q ds = \int_P^Q \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}} d\tau =: \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{L} d\tau \quad , \tag{8.15}$$

avec *le lagrangien* $\mathcal{L}$. Les équations de movement sont données par *les équations d'Euler–Lagrange* :

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad . \tag{8.16}$$

Notez que les coefficients g_{ij} de la métrique riemannienne dépend de $\mathbf{x}$ and elles sont symétriques.

8.3.1. Le principe de variation donne une connexion symétrique

En utilisant les équations d'Euler–Lagrange dérivez les équations géodesiques suivantes :

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i{}_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \quad ; \quad \Gamma^i{}_{jk} = \frac{1}{2} g^{i\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell} \right) \quad , \tag{8.17}$$

avec les symboles de Christoffel $\Gamma^i{}_{jk}$ d'une connexion symétrique, et le tenseur inverse de la métrique $g^{i\ell}$ avec $g^{i\ell} g_{\ell k} = \delta^i{}_k$.
Pourquoi pensez–vous que la connexion obtenue est symétrique ?

Conseils : Utilisez la symétrie par rapport à j and k dans l'expression suivante afin d'obtenir la forme proposée par Christoffel :

$$\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^k} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\ell j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{\ell k}}{\partial x^j} \right) \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \quad . \tag{8.18}$$

Notez aussi que la métrique dépend de $\mathbf{x}(\tau)$, i.e. elle dépend aussi implicitement du paramètre τ.
Dans les expressions obtenues vous pouvez employer la longueur intrinsèque s (à la place de τ) comme parametrisation des géodesiques, i.e. vous pouvez remplacer la racine du ségment par $ds/d\tau$ pendent vos calculs.

8.3.2. Les géodesiques dans un espace euclidéen

Discutez le résultat final pour le cas d'une métrique euclidéenne.